

Parte 1. Definizioni, esempi, enunciati di teoremi/proposizioni (20 punti)

Es 1 [Pt. 5] Enunciare il teorema di esistenza di zeri per funzioni continue. Come viene utilizzato questo teorema nella definizione analitica di π ?

Es 2 [Pt. 5] Dare la definizione di intorno, di insieme aperto, insieme chiuso, insieme compatto; fare esempi e controesempi (in particolare dare un esempio di insieme che non sia né aperto, né chiuso).

Es 3 [Pt. 5] Dare la definizione delle funzioni iperboliche ed enunciare i relativi limiti notevoli (per $x \rightarrow \pm\infty$ e $x \rightarrow 0$)

Es 4 [Pt. 5] Dare la definizione di massimo/minimo limite per successioni; discutere la relazione tra massimo/minimo limite ed eventuali limiti di sottosuccessioni.

Parte 2. Svolgimento di esercizi assegnati (60 punti)

Es 5 [Pt. 10] Calcolare $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \log(1+x) + \tan x}{\sin x + \sqrt[3]{x}}$.

Es 6 [Pt. 10] Calcolare $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{n^2 + n^4}\right)^n$.

Es 7 [Pt. 10] Studiare la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right)$.

Es 8 [Pt. 12] Determinare per quali $x \in \mathbb{R}$ la seguente serie converge: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{n9^n}$.

Es 9 [Pt. 10] Dire se la funzione $f(x) = x \log x$ è uniformemente continua in $(0, 3]$.

Es 10 [Pt. 8] Trovare i punti interni e i punti di frontiera dell'insieme $E := \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 \leq 0\}$.

Parte 3. Esercizio originale (20 punti)

Es 11 Sia $f(x) := \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x + \log x}$ con dominio $E := [1, \infty)$.

(i) Dimostrare che per ogni $y_0 \in [0, 1)$ esiste un unico $x_0 \in E$ tale che $f(x_0) = y_0$.

(ii) Discutere l'uniforme continuità di f su E .